Exercice 2: Electrodynamique d'un ensemble de sphères de plasma dans un champ électrique

L'usage de la calculatrice n'est ni utile ni autorisé.
Remarque générale: en réponse aux questions qui demandent de "décrire"/ d""interpreter" ou équivalent nous nous attendons à des discussions comportant des phrases entières, et non pas à des formules.

Système de petites particules métalliques dans un champ électrique

Considérons un système de petites particules métalliques, sujettes à un champ électrique extérieur. Les positions $\vec{x}_i$ des particules sont fixées.
(1) Décrire qualitativement ce qui se passe.
(2) Le champ externe oscille maintenant dans le temps. Décrire qualitativement ce qui se passe.
(3) Nous supposons que la polarisabilité de la particule i est donnée par le tenseur $\overleftrightarrow{\alpha}_i^{(1)}$. Donnez le moment dipolaire induit $\vec{p}_i$ en fonction du champ local $\vec{E}(\vec{x}_i)$ agissant sur la particule i. Spécifiez précisement ce que vous entendez par champ électrique local dans ce cas.
(4) Nous définissons la fonction-tenseur

$$\overleftrightarrow{U}(\vec{x}) = \frac{\overleftrightarrow{1}}{|x|^3} - \frac{3\vec{x}\vec{x}}{|x|^5}. \tag{1}$$

Discuter la signification physique de la quantité

$$-\overleftrightarrow{U}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)\vec{p}_j. \tag{2}$$

(Remarque: le tenseur $\overleftrightarrow{M} = \vec{a}\,\vec{b}$ est défini par son action sur un vecteur $\vec{c}$: Le résultat $\overleftrightarrow{M}\,\vec{c} = \vec{a}\,(\vec{b}\cdot\vec{c})$ est lui-même un vecteur. (Le point dénote le produit scalaire usuel.))
(5) Ecrire le champ électrique local en fonction du champ électrique extérieur $\vec{E}_\perp(\vec{x}_i)$ et de $\overleftrightarrow{U}(\vec{x})$.
(**Remarque**: dans tout l'exercice, nous nous restreignons à la contribution dipolaire au champ, en négligeant les contributions multipolaires d'ordres supérieurs.)

Système ordonné de sphères

Nous supposons maintenant que les particules sont identiques (et identiquement polarisées) et qu'elles forment un système *ordonné*: elles occupent les sites d'un réseau carré à deux dimensions.

(6) En déduire un ensemble d'équations auto-cohérentes pour les moments dipolaires induits des particules.
(7) Pour résoudre ces équations, introduire une décomposition en modes:

$$\begin{aligned} \vec{p}_i &= \sum_{\vec{q}} \vec{p}_{\vec{q}} \, \exp(i\vec{q}\cdot\vec{x}_i) & (3) \\ \vec{E}_\perp(\vec{x}_i) &= \sum_{\vec{q}} \vec{E}_{\perp\vec{q}} \, \exp(i\vec{q}\cdot\vec{x}_i) & (4) \\ \overleftrightarrow{U}(\vec{q}) &= \sum_{j\neq 0} \overleftrightarrow{U}(\vec{x}_j) \, \exp(-i\vec{q}\cdot\vec{x}_j) & (5) \end{aligned}$$

Donner la signification physique de la quantité

$$\overleftrightarrow{\alpha}_{total}(\vec{q},\omega) = (1 + \overleftrightarrow{\alpha}^{(1)}\overleftrightarrow{U}_{\vec{q}})^{-1} \, \overleftrightarrow{\alpha}^{(1)} \qquad (6)$$

(8) Dans la suite, nous nous restreignons à la limite de grandes longueurs d'ondes. Donner une expression matricielle explicite pour $\overleftrightarrow{U}(\vec{q}=0)$.
(Remarques:
(a) Il est utile de considérer $\vec{e}_\beta \, \overleftrightarrow{U}(\vec{q}=0)\vec{e}_\gamma$ où $\vec{e}_\beta$ (avec $\beta = x, y, z$) sont les vecteurs d'unité d'un système de coordonnées cartesiennes.
(b) Il peut aussi être utile de réfléchir sur $\sum_{j\neq 0} \frac{1}{|x_j|^5}(x_j^2+y_j^2)$ (où $\vec{x}_j = (x_j, y_j, z_j)$ sont les sites du réseau).
(c) Définir $U_0 = \sum_{j\neq 0} \frac{1}{|x_j|^3}$)
(9) Montrer que, dans une représentation matricielle $\overleftrightarrow{\alpha}_{total}(\vec{q}=0,\omega)$ est une matrice diagonale

$$\overleftrightarrow{\alpha}_{total}(\vec{q}=0,\omega) = \mathrm{diag}(\alpha_{||}^{total}(\omega), \alpha_{||}^{total}(\omega), \alpha_{\perp}^{total}(\omega)) \qquad (7)$$

Donner les valeurs de $\alpha_{||}^{total}(\omega)$ et $\alpha_{\perp}^{total}(\omega)$ en termes de $\alpha_i^{(1)}$ et U_0. Dans cette question, on admettra que le tenseur $\overleftrightarrow{\alpha}^{(1)}$ est en fait un scalaire: $\overleftrightarrow{\alpha}^{(1)} = \alpha^{(1)} \, \overleftrightarrow{1}$. (Ceci sera démontré dans la partie suivante.)

Particule individuelle

(10) Supposons que la fonction diélectrique du matériau est donnée par

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega(\omega + \frac{i}{\tau})} \qquad (8)$$

Quelle est la signification physique de ω_P et τ?
(11) Rappel: La polarisabilité d'une sphère individuelle de rayon R et de fonction diélectrique $\epsilon(\omega)$ est donnée par

$$\alpha^{(1)} = R^3 \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\epsilon(\omega) + 2} \qquad (9)$$

En supposant que les particules sont sphériques, calculer $\overleftrightarrow{\alpha}^{(1)}(\omega)$ pour une particule individuelle. Donner la fréquence de résonance Ω.
(12) En déduire $\alpha_{||}^{total}(\omega)$ et $\alpha_{\perp}^{total}(\omega)$. Commenter la forme des fonctions dans le cas où τ est grand. (Remarque: introduire des fréquences caractéristiques pour les deux polarisabilités.)

Absorbance d'un système de petites particules métalliques

(13) Nous considérons maintenant la réflectivité et la transmission d'une onde électromagnétique à un angle d'incidence θ sur le réseau 2d de particules. (θ est l'angle que le rayon incident forme avec la normale du plan.)
Pour une grande constante du réseau a (grande devant quoi?) on peut montrer que la réflectivité devient négligeable et la transmission est

$$|t|^2 = 1 - C\Im(cos^2(\theta)\alpha_{||}^{(1)} + sin^2(\theta)\alpha_{\perp}^{(1)}) \tag{10}$$

avec $C = \frac{4\pi\omega}{ca^2}\frac{1}{cos(\theta)}$. **N'essayez pas de démontrer cette formule!**
Calculer l'absorption.Tracé qualitatif en fonction de la fréquence. Interprêter physiquement les résultats obtenus.

Exercise 2: Electrodynamics of an array of plasma spheres in an electric field

Pocket calculators are not useful for this exam, and are thus not authorized. General remark: whenever a question involves the indication "describe"/ "interpret" or equivalent, we expect a discussion in whole sentences, not in formulae!

System of small metallic particles in electric field

We consider a system of small metallic particles, subject to an external electric field. The positions $\vec{x}_i$ of the particles are fixed.
(1) Describe qualitatively what happens.
(2) The external electric field now oscillates in time. Describe qualitatively what happens.
(3) Assume that the polarizability of particle i is given by a polarizability tensor $\overleftrightarrow{\alpha}_i^{(1)}$. Give the induced dipole moment $\vec{p}_i$ in terms of the local electric field $\vec{E}(\vec{x}_i)$ at particle i. Specify precisely what you mean by local electric field in this case.
(4) We define the tensor-valued function

$$\overleftrightarrow{U}(\vec{x}) = \frac{\overleftrightarrow{1}}{|x|^3} - \frac{3\vec{x}\vec{x}}{|x|^5}. \tag{1}$$

Discuss the physical meaning of the quantity

$$-\overleftrightarrow{U}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)\vec{p}_j. \tag{2}$$

(Hint concerning the notation: the tensor $\overleftrightarrow{M} = \vec{a}\,\vec{b}$ is defined by its action on a vector $\vec{c}$: The result $\overleftrightarrow{M}\,\vec{c} = \vec{a}\,(\vec{b}\cdot\vec{c})$ is itself a vector. (The dot denotes the usual scalar product.))

(5) Write the local electric field in terms of the external field $\vec{E}_\perp(\vec{x}_i)$ and $\overleftrightarrow{U}(\vec{x})$.
(**Remark**: in the entire exercise we restrict ourselves to the dipole contribution of the field, neglecting quadrupole and higher order contributions.)

Ordered system of spheres

We assume now that the particles are identical (and identically polarized) and that they form an *ordered* system, i.e. they occupy the sites of a two-dimensional square lattice.
(6) Deduce a set of self-consistent equations for the induced dipole moments of the particles.
(7) To solve these equations, introduce a decomposition into modes:

$$\vec{p}_i = \sum_{\vec{q}} \vec{p}_{\vec{q}} \exp(i\vec{q}\cdot\vec{x}_i) \tag{3}$$

$$\vec{E}_\perp(\vec{x}_i) = \sum_{\vec{q}} \vec{E}_{\perp\vec{q}} \exp(i\vec{q}\cdot\vec{x}_i) \tag{4}$$

$$\overleftrightarrow{U}(\vec{q}) = \sum_{j\neq 0} \overleftrightarrow{U}(\vec{x}_j) \exp(-i\vec{q}\cdot\vec{x}_j) \tag{5}$$

Give the physical meaning of the quantity

$$\overleftrightarrow{\alpha}_{total}(\vec{q},\omega) = (1+\overleftrightarrow{\alpha}^{(1)}\overleftrightarrow{U}_{\vec{q}})^{-1}\overleftrightarrow{\alpha}^{(1)} \tag{6}$$

(8) In the following, we restrict ourselves to the limit of long wavelengths. Give an explicit matrix expression for $\overleftrightarrow{U}(\vec{q}=0)$.
(Hints:
(a) Consider $\vec{e}_\beta \overleftrightarrow{U}(\vec{q}=0)\vec{e}_\gamma$ where $\vec{e}_\beta$ (with $\beta = x, y, z$) are the unit vectors of a Cartesian coordinate system.
(b) Consider the sum $\sum_{j\neq 0} \frac{1}{|x_j|^5}(x_j^2+y_j^2)$ (where $\vec{x}_j = (x_j, y_j, z_j)$ are the lattice sites)
(c) Define $U_0 = \sum_{j\neq 0} \frac{1}{|x_j|^3}$)
(9) Show that, in a matrix representation, $\overleftrightarrow{\alpha}_{total}(\vec{q}=0,\omega)$ may be written as the diagonal matrix

$$\overleftrightarrow{\alpha}_{total}(\vec{q}=0,\omega) = \begin{pmatrix} \alpha_{||}^{total}(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{||}^{total}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{\perp}^{total}(\omega) \end{pmatrix} \tag{7}$$

and give the values of $\alpha_{||}^{total}(\omega)$ and $\alpha_{\perp}^{total}(\omega)$ in terms of $\alpha_i^{(1)}$ and U_0. In this question you may assume that the tensor $\overleftrightarrow{\alpha}^{(1)}$ is in fact a scalar: $\overleftrightarrow{\alpha}^{(1)} = \alpha^{(1)}\overleftrightarrow{1}$. (This will be shown in the next part.)

Single particle

(10) Assume that the dielectric function of the material is given by

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega(\omega+\frac{i}{\tau})} \tag{8}$$

What is the physical meaning of ω_P and τ?
(11) Reminder: The polarizability of a single sphere of radius R with dielectric function $\epsilon(\omega)$ is given by

$$\alpha^{(1)} = R^3\frac{\epsilon(\omega)-1}{\epsilon(\omega)+2} \tag{9}$$

Assuming the particles to be spherical, calculate $\overleftrightarrow{\alpha}^{(1)}(\omega)$ for a single particle. Give the resonance frequency Ω.

(12) Deduce $\alpha_{||}^{total}(\omega)$ and $\alpha_{\perp}^{total}(\omega)$. Comment on the shape of the functions in the case where τ is large. (Hint: introduce characteristic frequencies for both polarizabilities.)

Absorbance of a system of small metallic particles

(13) We now consider the reflectivity and transmission of an incident electromagnetic wave at an angle of incidence θ onto the two-dimensional array of particles. (θ is counted as the angle that the incident beam forms with the normal on the plane.)
For large lattice spacing a (large compared to what?) it can be shown, that the reflectance becomes negligible and the transmittance is given by

$$|t|^2 = 1 - C\Im(cos^2(\theta)\alpha_{||}^{(1)} + sin^2(\theta)\alpha_{\perp}^{(1)}) \tag{10}$$

with $C = \frac{4\pi\omega}{ca^2}\frac{1}{cos(\theta)}$. **(Do not derive this formula!)**
Calculate the absorbance, make a sketch as a function of frequency and interpret physically.

Exercice (3) Mécanique céleste

Aux confins du système solaire se meut Pluton (m_P = 1,27 10^{22} kG) qui est un petit astre de diamètre 2274 km. La période de révolution de Pluton autour du soleil est de T = 248 ans. Pluton possède plusieurs lunes (au moins 3) dont l'une, Charon, a un diamètre de 1172 km et une masse m_C = 1,9 10^{21} kg. La distance Pluton - Charon est de d = 19640 km. On assimile Pluton et Charron à des sphères homogènes idéales.
Pluton tourne sur elle - même en à peu près 6,4 jours. C'est également la période de rotation de Charon sur elle-même ainsi que la période de rotation de Charon autour de Pluton.

On se propose d'analyser le mouvement du couple Pluton – Charon autour du soleil sur des intervalles de temps petits par rapport à T. Le soleil sera considéré comme immobile et le repère héliocentrique galiléen.
I) Déterminer la position du centre de masse G du couple Pluton –Charon sur le segment joignant les centres des deux astres. Comparer à la situation du couple Terre – Lune. On assimilera la Terre et la Lune à des sphères homogènes de même densité et l'on prendra le rapport de leurs rayons égal à 0.27.

II1) Ecrire les équations du mouvement des deux astres assimilés à des points matériels.
II2) On pose $m_P\vec{r}_P + m_C\vec{r}_C = (m_P + m_C)\vec{r}_G \quad , \quad \vec{r}_P - \vec{r}_C = \vec{\rho}$.
Quelles sont les équations du mouvement des variables $\vec{r}_G$ et $\vec{\rho}$?

II3) Quel est l'ordre de grandeur du rapport $\frac{\rho}{r_G}$? En déduire l'équation vérifiée par $\vec{r}_G$ à l'ordre zéro en $\vec{\rho}$. Analyser les trajectoires possibles de la variable $\vec{r}_G$.

III1) On se place sur un intervalle de temps$[0, \tau]$ $\tau << T$. Comment s'écrit l'évolution de $\vec{r}_G(t)$ sur $[0, \tau]$?
III2) Quelle est l'équation du mouvement de la variable $\vec{\rho}$? La résoudre en supposant la trajectoire de $\vec{\rho}$ circulaire. On notera xOy le plan contenant ce cercle. En déduire l'allure de l'évolution temporelle de $\vec{r}_P(t)$ sur un intervalle de temps$[0, \tau]$ $\tau << T$.

IV) La planète Saturne est une géante gazeuse (M = 5,69$10^{26}$kg), la seconde en importance dans le système solaire après Jupiter. Elle possède des particularités remarquables, par exemple ses anneaux. Elle est entourée de plus de 30 lunes qui ont été observées depuis la Terre ou plus récemment par des sondes spatiales, par exemple les sondes Voyager 2, Cassini. La lune Dioné, découverte par Cassini en 1684, a une masse de 1.05 10^{21}kg. Son rayon équatorial est de 560 km. Elle orbite autour de Saturne en 2,74 jours sur une trajectoire à peu près circulaire de rayon 377400 km (= 6,2 $R_{Saturne}$). Sa période de rotation autour de son axe est également de 2,74 jours.
De nombreuses observations astronomiques ont établi que dans sa rotation autour de Saturne, Dioné est accompagnée de deux petites lunes Hélène (36kmx32kmx30km) et Polydeuces (en latin Pollux) de diamètre ≈ 4 km. Les trios Dioné-Hélène-Saturne ainsi que Dioné-Polydeuces-Saturne forment un triangle équilatéral indéformable contenu dans le plan de la trajectoire de Dioné.
En considérant que les membres de chacun des trios sont assimilables à des sphères homogènes, justifier cette observation. On pourra analyser la résultante des forces s'exerçant sur chacun des trois corps d'un trio formant un triangle équilatéral (par exemple Saturne, Dioné, Hélène). Il pourra être utile de faire intervenir le centre de masse des trois corps.

Exercise (3) Celestial mechanics

At the boundaries of our solar system moves Pluto(m_P = 1,27 10^{22} kG), a tiny planetoid with diameter 2274 km. The period of Pluto motion around the Sun is T = 248 (earthian) years. Pluto has several moons. One of them, Charon has a diameter of 1172 km, a mass m_C = 1.9 10^{21}kg. The Pluto - Charon distance is d = 19640 km. Pluto and Charon will be assumed ideal homogeneous spheres.

Pluto rotates around its axis in 6.4 days. So does Charon. 6.4 days is also the period of the Charon rotation around Pluto.

We want to analyze the motion of the Pluto – Charon couple around the Sun on a time scale $\tau << T$. In what follows, the Sun will be assumed immobile and the heliocentric system will be taken as Galilean.

I) Determine the position of the center of gravity G of the Pluton –Charon couple on the segment that joins the centers of the two bodies. Compare to the Earth – Moon situation. Moon and Earth are considered as homogeneous spheres with identical densities The ratio between Moon to Earth radii is 0.27.

II1) Write the equations of motion for the two bodies considered as point particles.

II2) We let $m_P\vec{r}_P + m_C\vec{r}_C = (m_P + m_C)\vec{r}_G \quad , \quad \vec{r}_P - \vec{r}_C = \vec{\rho}$

Write the equations of motions for the variables $\vec{r}_G$ and $\vec{\rho}$.

II3) Give an estimate of the ratio ρ/r_G. Deduce the equation of motion for $\vec{r}_G$ at the zero order in ρ. Analyze the possible trajectories for $\vec{r}_G$.

III1) Write the time evolution of $\vec{r}_G$(t) on the time segment $[0, \tau]$.

III2) What is the equation of motion for the $\vec{\rho}$ variable? Solve it assuming the ρ trajectory to be a circle. We call xOy the plane containing that circle. Deduce the shape of the time evolution of $\vec{r}_P(t)$ on a time interval$[0, \tau]$ $\tau << T$.

IV) Saturn is a gaseous giant planet (M = 5,69$10^{26}$kg), the second in size after Jupiter in the solar system. It has remarkable properties, notably its magnificent rings. More than 30 moons surround it. These moons were observed either from Earth or more recently by spacecrafts (Voyager2, Cassini).

The moon Dionne, discovered by Cassini in 1684 has a mass of 1.05 10^{21}kg. Its equatorial radius is equal to 560 km. It rotates around Saturn in 2,74 days on an almost circular orbit with radius equal to 377400 km (= 6.2 R_{Saturn}).

Numerous astronomical observations have established that Dionne is accompanied by two tiny moons: Helene (36kmx32kmx30km) and Polydeuces (Latin Pollux) with a diameter ≈ 4 km. The trios Dionne-Helene-Saturn and Dionne-Polydeuces-Saturn form rigid equilateral triangles in the plane of Dionne trajectory. Restrict your considerations to either one of the trios. Each of the members is considered to be a perfectly homogeneous sphere.

Show that if at a certain time the three bodies form an equilateral triangle, this triangle will remain unchanged during time. Hint: analyze the forces acting on each member of the trio (for example Saturn, Dionne, Helene). It may prove useful to make use of the center of mass of the trio.